

Хугелшеферова јајаста крива као нова транзициона крива при дизајнирању путева

Маја Петровић^а, Бранко Малешевић^б, Александар Трифуновић^а, Драган Лазаревић^а, Матеја Милошевић^б

^а Универзитет у Београду – Саобраћајни факултет, Војводе Степе 305, Београд

^б Универзитет у Београду – Електротехнички факултет, Булевар краља Александра 73, Београд

ПОДАЦИ О РАДУ

DOI: 10.31075/PIS.69.02.06

Стручни рад

Примљен: 05.05.2023.

Прихваћен: 17.05.2023.

Кореспондент аутор:

majaret@sf.bg.ac.rs;

a.trifunovic@sf.bg.ac.rs

Кључне речи:

Саобраћајна инфраструктура

Пројектовање путева

Транзициона крива

Хугелшеферова јајаста крива

Питагорина тројка бројева

Безбедност саобраћаја

РЕЗИМЕ

Путеви и железничке пруге као главни делови саобраћајне инфраструктуре, садрже геометријски круте елементе који се тешко могу прилагодити одређеним врстама пејзажа без прављења великих промена самог терена. Данас, захваљујући савременој технологији и великом броју софтверских алата, могуће је дефинисати нове геометријске криве које се могу лако прилагодити тако да се користе као транзиционе криве при дизајнирању путева и железница. Ове прелазне криве се могу формирати тако да се уклопе у околни пејзаж или урбано окружење, што може побољшати естетику транспортног система. Такође, прелазне криве обезбеђују глатку и постепену промену закривљености, што смањује ризике од изненадне промене у кривини, које могу изазвати непријатност за путнике и створити небезбедну ситуацију, као што је губитак контроле возила или искакање воза из шина. Складно томе, у овом раду, дефинисани су параметри за генерисање Хугелшеферове криве, као нове транзиционе криве између два кружна пута.

1. Увод

Генерисање транзиционих кривих за примену у саобраћајном инжењерству датира још од краја XIX века (Crandall, 1893; Howard, 1891; Kellogg, 1907; Lordly, 1892; Rankine, 1862; Talbot, 1915).

1.1. Дефинисање прелазних кривих - XIX век

У подпоглављу о Кривама у железници, аутор Ранкин (Rankine, 1862: Part III, Section IV: Curves of Railways, pp.655) поставља следећи проблем:

„ПРОБЛЕМ ТРЕЋИ. Повезати кружни лук и праву линију, или два кружна лука, који се не додирују и не секу, помоћу еластичне криве“.¹

¹ превод аутора рада са енглеског језика, који у оригиналу гласи: „PROBLEM THIRD. To connect a circular arc and a straight line, or two circular arcs, which do not touch or cut each other, by means of an elastic curve“.

Пар наредних слика представљају графички приказ овог проблема (Слика 1 и Слика 2).

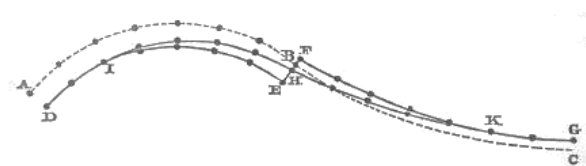


Fig. 276.

а) Слика преузета из Rankine, 1862: pp.652.

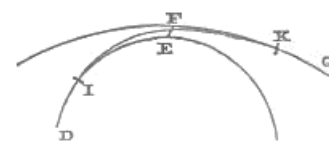
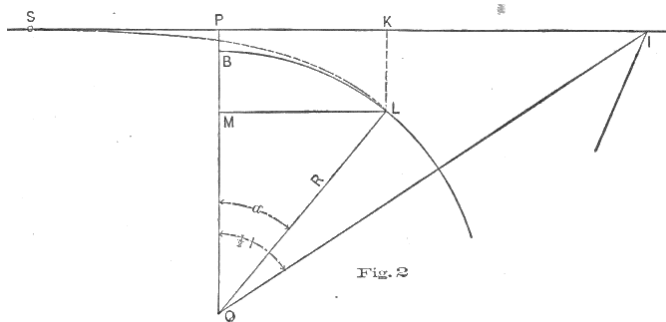


Fig. 279.

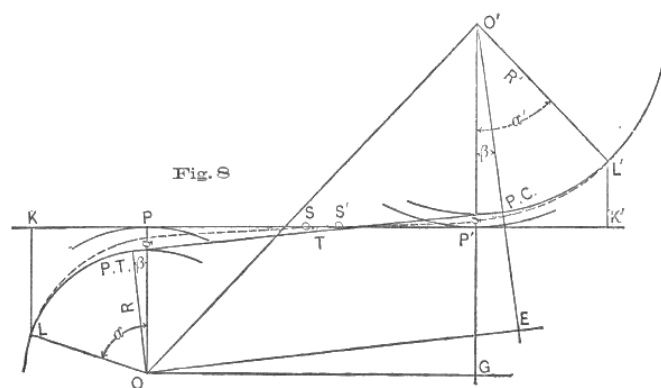
б) Слика преузета из Rankine, 1862: pp.655.

Слика 1. Транзициона крива за два кружна лука

Аутор Ховард (Howard, 1891), у предговору своје књиге о Транзиционим кривама истиче да је циљ његовог истраживања датог у књизи да пружи обична, практична правила и примере за вођење у подешавању и лоцирању криве, скоро идентичне са кубном параболом, као прелазне криве у повезивању кружних кривих са правом (Слика 2). Ховард истиче да је реч "повезати", примењена на спој прелазне и кружне кривине, значи да у тачки спајања две криве увек имају заједничку тангенту и, осим ако није другачије назначено, исти степен закривљености. Такође, Ховардов израз "централни угао", када се примени на прелазну криву, означава укупну кривину између тангенте у почетној тачки и оне у другој разматраној тачки.



а) Слика преузета из Howard, 1891: pp.29



б) Слика преузета из Howard, 1891: pp.52

Слика 2. Транзициона крива за праву линију и један(а)/два(б) кружна лука

Аутор Крандал (Crandall, 1893) истиче значај и неопходност увођења транзиционих кривих (видети Слика 3а). Такође, Крандал дефинише нове једначине транзиционих кривих (сложене криве², Слика 3б) и на крају своје књиге, као и Ховард, даје табеларни приказ за нумеричке вредности параметара који одговарају дефинисаним кривама.

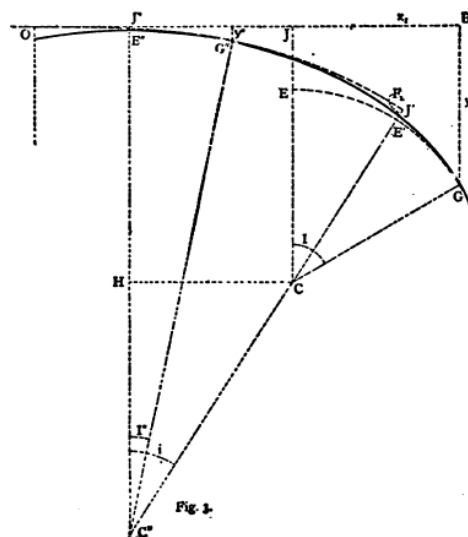
² Engl. „compound curves“

TRANSITION CURVES.

1. Necessity for Transition Curves.—The road bed upon a tangent or straight track is made level transversely; upon a circular curve it is inclined toward the center to counteract centrifugal force. The change from the one to the other must be gradual for easy riding, and to prevent twisting the trucks. Hence if the inclination of the road-bed is to be proportional to the centrifugal force at every point, a transition curve must be used, in which the curvature increases directly with the distance, in passing from the tangent to the circular curve.

2. Different Kinds in Use.—Rankine (*Civil Engineering*) gives the credit of first laying out railroad curves with a gradual increase of curvature, starting from the tangent, to Mr. Gravatt about 1828; of using such a curve to connect the tangent and main circular curve, to Mr. Wm. Froude about 1843,—their methods being first published in 1860-1.

а) Слика преузета из Crandall, 1893: pp.1



б) Слика преузета из Crandall, 1893: pp.13

Слика 3. Транзиционе криве

1.2. Истраживање прелазних кривих - XX век

У првој деценији двадесетог века, објављена је још једна књига о транзиционим кривама или кривама прилагођавања које су примењене на трасу железничких пруга, аутора Келога (Kellogg, 1907). Келог разматра спиралне криве као сложене криве². Уколико се жели увести трећа кружна кривина, споља и спајајући друге две фиксне кружне кривине, помоћу спиралних лукова, који се сви окрећу у истом правцу, тада су ови услови графички представљени на Слици 4. На овај начин Келог дефинише спиралне криве као транзиционе криве при дизајнирању пруга (Kellogg, 1907).

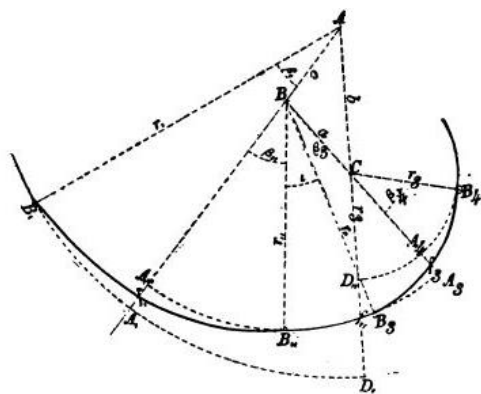


Fig. 8.

а) Слика преузета из Kellogg, 1907: pp.33

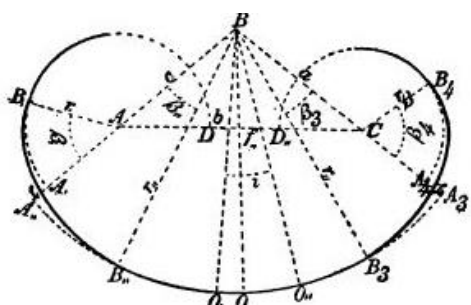


Fig. 8a.

б) Слика преузета из Kellogg, 1907: pp.37

Слика 4. Спирала као транзициона крива

Транзициона крива, или крива преласка³, како је понекад називају, јесте крива различитог радијуса која се користи за повезивање кружних кривина са правима (тангентима, Слика 5) у сврху избегавања шока и непријатног трзања возова услед тренутне промене релативног положаја воза, вагона и вучних шипки, као и до изненадне промене са једног нивоа на нагнуту стазу. Увођењем спирале може се направити повишење спољне шине тако да одговара кривини у свим тачкама око прелазне кривине, а вагони, опруге, вучне полуге и каросерија постепено ће достићи свој коначни положај за главну кривину („Talbot, 1915). Примарни циљ прелазне криве је, дакле, да постигне глатку возњу када воз улази или излази из кривине. Талботова дефиниција⁴ гласи: Транзициона спирала је крива чији степен кривине расте пропорционално са растојањем дуж криве од центра спирале.

И Келог и Талбот на крају књиге дају табеларни приказ за нумеричке вредности параметара који одговарају дефинисаним спиралама.

³ Engl. „easement curve“.

⁴ Engl. „Definition. The Transition Spiral is a curve whose degree-of-curve increases directly as the distance along the curve from the point of spiral“.

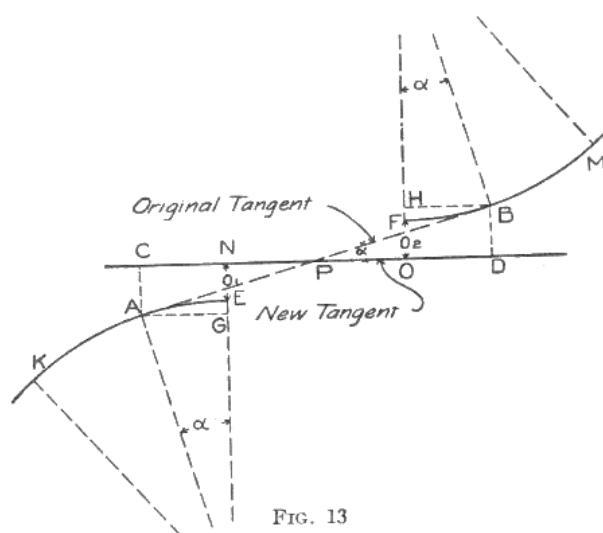


FIG. 13

а) Слика преузета из Talbot, 1915

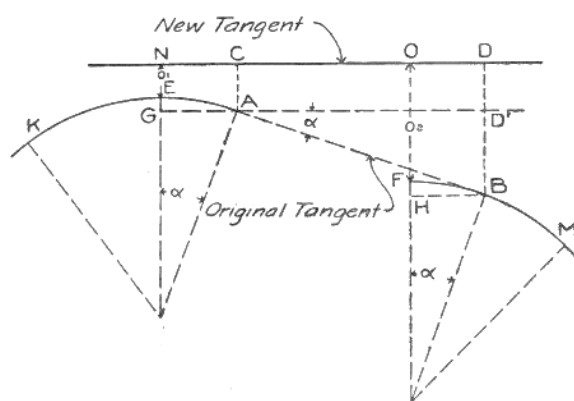


FIG. 14.

б) Слика преузета из Talbot, 1915

Слика 5. Приказ примера транзиционих кривих

Клотоидне криве се користе у мађарском инжењерству путева, као прелазне криве између праве линије пута и кружних лукова. Крајем прошлог века, на немачку и на италијанску иницијативу, појавиле су се примене двопараметарских хипер-клотоида у путном инжењерству. Аутор Nemesdy (1985) у свом раду о хипер-клотоидама развија скупове тачних и приближних формула за израчунавање ових транзиционих кривих као функције дужине лука.

1.3. Истраживање прелазних кривих - XXI век

Истраживање различитих типова транзиционих кривих (клотоида, полиномна параметарска крива, Блосова крива, спирала, ...) са применом у саобраћајном инжењерству дали су следећи аутори Blanch et al., 2013; Bosurgi & D'Andrea, 2012; Brustad & Dalmo, 2020; Ciampa & Olita, 2020; Eliou & Kaliabetsos, 2014; Kobryń, 2017; Kurhan et al., 2022; Lecture notes, 2012; Taşçi & Kuloğ, 2011.

Криве јајастог облика, једноструке или двоструке, такође имају примену у саобраћају као транзиционе криве за аутопутеве, у уређењу урбаних чворова, игралишта итд. (Коџ et al., 2015; Vázquez-Méndez et al., 2020). Примену би-квадратне параболе и синусоидне криве, као прелазне криве између два кружна пута разматрали су аутори Pirti et al., 2016; Pirti, & Yücel, 2012.

1.4. Функција прелазних кривих

Примарна функција прелазних кривих је да обезбеде постепени прелаз између две кружне деонице пута, железнице или нека друга два дела саобраћајне инфраструктуре. Ова постепена транзиција између путева служи у неколико сврха (Housing News Desk, 2023):

- **Смањење непријатности и опасности по безбедност саобраћаја:** Изненадне промене у кривини могу изазвати непријатност за путнике и створити безбедносне опасности, као што је искакање из шина или губитак контроле возила. Прелазне криве обезбеђују глатку и постепену промену закривљености, што смањује ове ризике;
- **Дистрибутивне силе:** Оштре кривине могу изазвати прекомерно хабање шина, точкова и других компоненти транспортног система. Прелазне криве распоређују силе и смањују хабање, што може продужити животни век инфраструктуре и смањити трошкове одржавања;
- **Повећање удобности у вожњи:** Смањењем бочног убрзања које доживљавају путници, прелазне кривине могу побољшати удобност вожње и смањити умор;
- **Повећање капацитета:** Смањењем потребе за ограничењима брзине у оштрим кривинама, прелазне кривине могу повећати капацитет железнице или аутопута, што може смањити загушење и побољшати време путовања;
- **Побољшање естетике:** Прелазне криве се могу дизајнирати тако да се уклопе у околни пејзаж или урбано окружење, што може побољшати естетику транспортног система и смањити визуелне утицаје.

Може се истаћи да је функција прелазних кривих да уравнотежи захтеве у погледу удобности вожње, безбедности, капацитета, одржавања и естетике, чинећи их битним елементом савременог дизајна транспорта.

2. Методологија

2.1. Дефинисање Хугелшеферове криве

Конструкцију јајасте криве помоћу два неконцентрична круга дефинисао је немачки инжењер Фриц Хугелшефер, (Flugsport, 1944; Schmidbauer, 1948, Schmidbauer, 1949; Petrović, 2010; Petrović & Obradović, 2010; Ferréol, 2022; Petrović et al., 2023; Petrović & Malešević, 2023).

Нека је дата прва кружница са полупречником a и центром у тачки $(0, 0)$, (Слика 6, линија цијан боје). Параметарска једначина ове кружнице је дата следећим изразом:

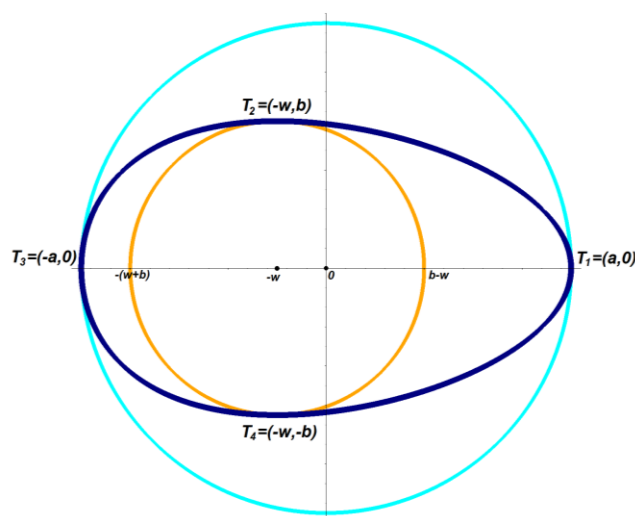
$$\begin{aligned} f_1(t) &= a \cos t \\ g_1(t) &= a \sin t \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi) \quad (1)$$

Друга кружница са полупречником b и центром $(-w, 0)$ приказана на Сlici 6, линијом наранџасте боје, задата је изразом:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -w + b \cos t \\ g_2(t) &= b \sin t \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi) \quad (2)$$

Хугелшеферова јајаста крива (Слика 6, линија тегет боје) генерисана помоћу претходне две кружнице има следећи израз:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t ((a^2 - w^2 \sin^2 t)^{1/2} + w \cos t), \\ g(t) &= b \sin t \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi) \quad (3)$$



Слика 6. Генерисање Хугелшеферове криве

⁴ Engl. „slow order“.

2.2. Одређивање полупречника кривине Хугелшеферове криве као транзиционе криве

За сваку тачку алгебарске криве полупречник круга кривине је одређен следећим изразом:

$$R(t) = [(f'(t))^2 + (g'(t))^2]^{3/2} / [f'(t) \cdot g''(t) - f''(t) \cdot g'(t)]. \quad (4)$$

Нека је први полупречник кривине пута дефинисан у почетној тачки T_1 Хугелшеферове криве тј. за вредност $t=0$, затим други полупречник у тачки T_2 (за $t=\pi/2$), док је трећи у T_3 тј. за $t=\pi$:

$$\begin{aligned} R_1 &= R(0) = b^2 a / (a + w)^2 \\ R_2 &= R(\pi/2) = (a^2 - w^2) / b \\ R_3 &= R(\pi) = b^2 a / (a - w)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Када је $R(\pi/2) = b$ тада важи услов транзиције:

$$a^2 = b^2 + w^2. \quad (6)$$

Напоменимо да бројеви a , b и w који испуњавају услов (6) одређују Питагорине тројке. Овај услов транзиције је значајан код примене јајастих кривих као транзиционих кривих при пројектовању саобраћајница јер нам омогућава једноставну конструкцију Хугелшеферове криве. Такође, битна је и следећа чињеница која произилази из услова транзиције (6) да у прелазним тачкама брзина и убрзање остају исти тј. гладак је прелазак из кружног лука са полупречником R_1 у јајасту криву; из јајасте криве у кружни лук са полупречником R_2 и обрнуто; као и прелазак из јајасте криве у кружни лук са полупречником R_3 .

3. Резултати

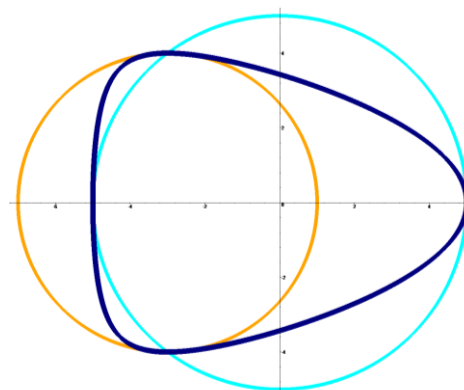
3.1. Формирање параметара Хугелшеферове криве преко Питагориних тројки

На основу услова транзиције (6) размотрићемо изборе седам основних Питагориних тројки које су дате следећом табелом за дефинисање параметара (w, b, a) Хугелшеферове криве.

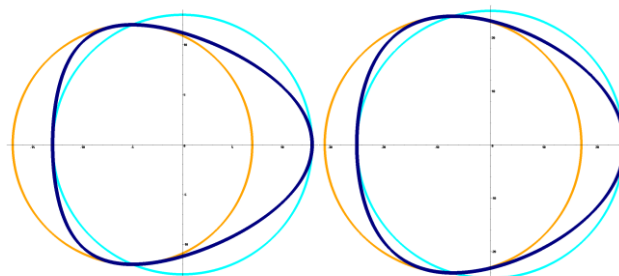
Табела 1. Приказ комбинација 7 основних Питагориних тројки за генерисање Хугелшеферове криве

(w, b, a)	R_1	$R_2 = b$	R_3
(3, 4, 5)	5/4	4	20
(5, 12, 13)	52/9	12	117/4
(7, 24, 25)	225/16	24	400/9
(8, 15, 17)	153/25	15	425/9
(9, 40, 41)	656/25	40	1025/16
(12, 35, 37)	925/49	35	1813/25
(20, 21, 29)	261/49	21	1421/9

За претходне изборе параметара Хугелшеферове криве као транзиционе криве дефинисани су нови јајасте облици кривих, који су приказани на Слици 10.

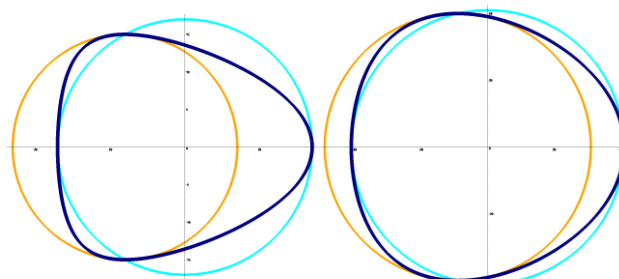


$(w, b, a) = (3, 4, 5)$



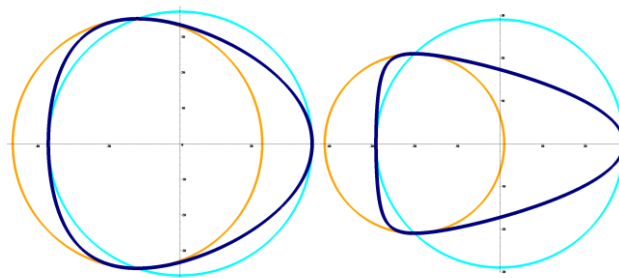
$(w, b, a) = (5, 12, 13)$

$(w, b, a) = (7, 24, 25)$



$(w, b, a) = (8, 15, 17)$

$(w, b, a) = (9, 40, 41)$



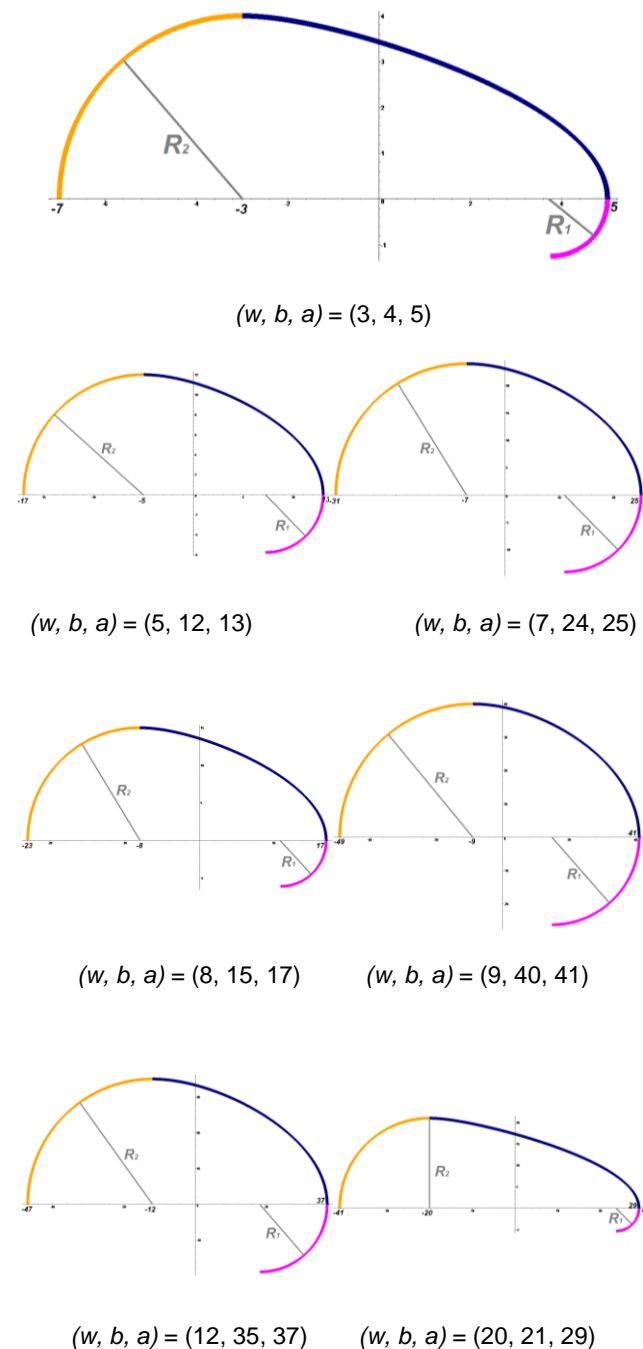
$(w, b, a) = (12, 35, 37)$

$(w, b, a) = (20, 21, 29)$

Слика 10. Хугелшеферове криве са параметрима (w, b, a)

3.2. Хугелшеферова крива као транзициона крива између две кружнице полупречника R_1 и R_2

Помоћу формуле (4) за полупречник кривине у тачкама T_1 и T_2 Хугелшеферове криве дефинисани су R_1 и R_2 чије су вредности дате у Табели 1 (друга и трећа колона). Након тога дати су графички прикази Хугелшеферових кривих са одговарајућим параметрима, које представљају транзиционе криве између два кружна лука са полупречницима R_1 и R_2 (Слика 11).



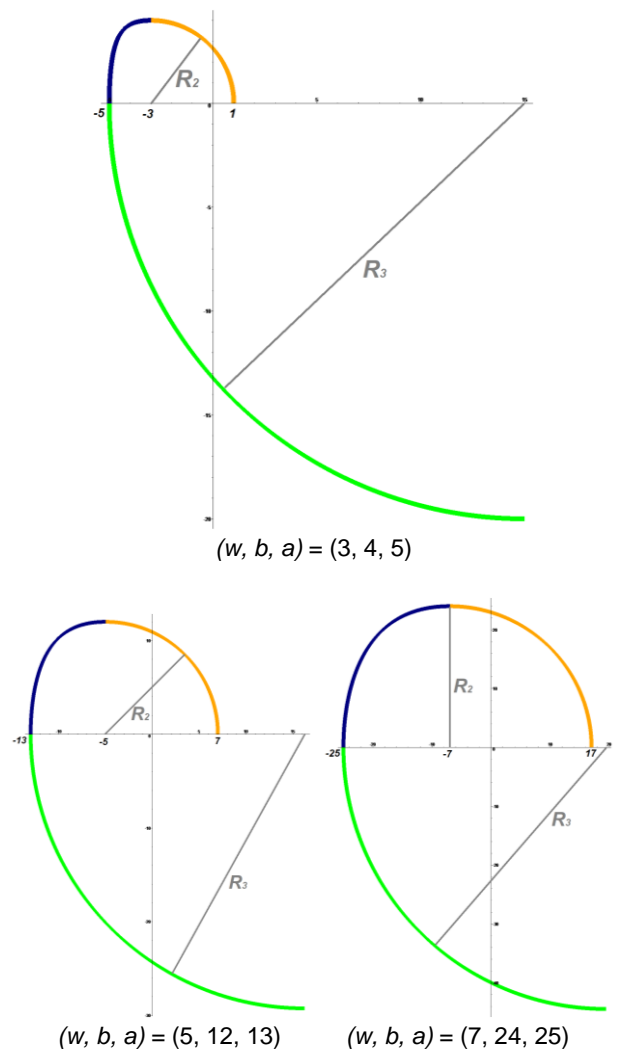
Слика 11. Хугелшеферове криве као транзиционе криве између два кружна лука полупречника R_1 и R_2

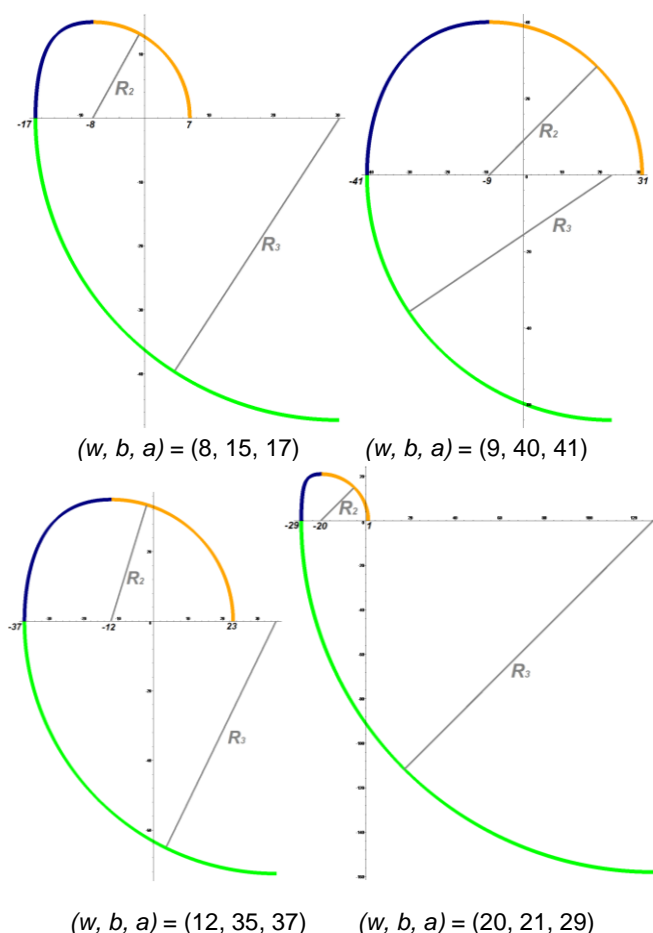
Потребно је нагласити да су глатки следећи преласци:

- у тачки $T_1 (a, 0)$; тј. прелазак из кружног лука са полупречником R_1 (Слика 11, линија лила боје) у јајасту криву (Слика 11, линија тегет боје);
- у тачки $T_2 (-w, b)$; тј. прелазак из јајасте криве (Слика 11, линија тегет боје) у кружни лук са полупречником R_2 (Слика 11, линија наранџасте боје).

3.3. Хугелшеферова крива као транзициона крива између две кружнице полупречника R_2 и R_3

Помоћу формуле (4) за полупречник кривине у тачкама T_1 и T_2 Хугелшеферове криве дефинисани су R_2 и R_3 чије су вредности дате у Табели 1 (трећа и четврта колона). Графички прикази Хугелшеферових кривих са одговарајућим параметрима, које представљају транзиционе криве између два кружна лука са полупречницима R_2 и R_3 , дати су на Слици 12.





Слика 12. Хугелшеферове криве као транзиционе криве између два кружна лука полупречника R_2 и R_3

Такође, важи да је гладак прелазак:

- у тачки $T_2(-w, b)$ из кружног лука са полупречником R_2 (Слика 12, линија наранџасте боје) у јајасту криву (Слика 12, линија теget боје);
- у тачки $T_3(-a, 0)$ из јајасте криве (Слика 12, линија теget боје) у кружни лук са полупречником R_3 (Слика 12, линија зелене боје).

И на крају, треба напоменути да је у раду Petrović et al., 2023, разматран предлог примене Хугелшеферове транзиционе криве, као директрисе за генерисање нових површи константног пада, у сврхе креирања елемената саобраћајне инфраструктуре.

4. Закључак

Конструисање Хугелшеферових јајастих кривих са параметрима који су дефинисани на основу седам основних Питагориних тројки, омогућила је да се спроведе анализа примене овако генерисаних кривих за надовезивање између два кружна лука различитих полупречника.

Значај примене јајастих кривих као транзиционих кривих при пројектовању саобраћајница огледа се у њиховој једноставној конструкцији и чињеници да у прелазним тачкама брзина и убрзање остају исти (прелазак из првог кружног лука у јајасту криву; из јајасте криве у други кружни лук и обрнуто; као и прелазак из јајасте криве у трећи кружни лук).

Правци будућих истраживања треба да буду усмерени на већи спектар параметара којим можемо генерисати Хугелшеферове криве, као и на њихову примену у саобраћајном инжењерству. Такође, истраживање треба проширити и на оне делове Хугелшеферових кривих који повезују различито позициониране кружне лукове (на пример када је угао између два кружна лука различит од $\pi/2$).

Hügelschäffer Egg Curves as Transition Curves in Road Design

Maja Petrović^a, Branko Malešević^b, Aleksandar Trifunović^a, Dragan Lazarević^a, Mateja Milošević^b

^a University of Belgrade - The Faculty of Transport and Traffic Engineering, Vojvode Stepe 305, Belgrade

^b University of Belgrade-School of Electrical Engineering Bulevar kralja Aleksandra 73, Belgrade

Abstract: Roads and railways, as the main parts of traffic infrastructure, represent geometrically rigid elements which are hard to adapt to certain kinds of landscapes without making large changes to the terrain itself. Today, thanks to modern technology and a large number of software tools, it is possible to define new geometric curves which are easily adaptable for use as transition curves when designing roads or railways. These transition curves can be formed in such a way to make them fit in with the surrounding landscape or urban environment better, which can improve the aesthetics of the transport system. Furthermore, transition curves provide a smooth and gradual change of curvature, reducing the risk of sudden curvature changes, which can cause discomfort to passengers and create an unsafe situation, such as a loss of vehicle control or a train derailment. Accordingly, in this paper, we define the parameters for generating Hügelschäffer curves as new transition curves between two circular road segments.

Keywords: traffic infrastructure, road design, transition curve, Hügelschäffer egg curve, Pythagorean triples, traffic safety

Acknowledgments: The second author was financially supported in part by the Ministry of Science, Technological Development and Innovation of the Republic of Serbia under contract number: 451-03-47/2023-01/200103. This study was supported by The Ministry of Education, Science and Technological Development of Serbia (projects 36027 and 36022, for third and fourth author).

Литература

- [1] Blanch, L., Checa, E. & Marin, J. (2013). Una aproximacion a la curva de transicion Clotoide vista desde Mathematica. *Modelling in Science Education and Learning*, 6(2):9, pp. 105–119.
- [2] Bosurgi, G. & D'Andrea, A. (2012). A Polynomial Parametric Curve (PPC-CURVE) for the Design of Horizontal Geometry of Highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 27, pp. 303–312.
- [3] Brustad, T.F. & Dalmo, R. (2020). Railway Transition Curves: A Review of the State-of-the-Art and Future Research. *Infrastructures*. 5(5): 43, pp. 1–20. DOI: 10.3390/infrastructures5050043
- [4] Ciampa, D. & Olita, S. (2020). The Use of Bloss Curve in the Exit Lanes of Road Intersections. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 15(1), pp. 76–102, DOI: 10.7250/bjrbe.2020-15.462
- [5] Crandall, C. L. (1893). *The Transition Curve by Offsets and by Deflection Angles*. New York: John Wiley & Sons.
- [6] Eliou, N. & Kaliabetsos, G. (2014). A new, simple and accurate transition curve type, for use in road and railway alignment design. *Eur. Transp. Res. Rev.* 6, pp. 171–179
- [7] Ferréol, R. (2022). Oeuf de Hügelschäffer: <https://mathcurve.com/courbes2d/oeuf/oeuf.shtml>
- [8] Flugsport (1944). Luftfahrt Zeitschrift Flugsport-Kompletter Jahrgang (I. Eierkurven nach F. Hügelschäffer). *Digitale Luftfahrt-Bibliothek*, 9,162–163.
- [9] Glavić, D., Mladenović, M., Stevanovic, A., Tubić, V., Milenković, M., & Vidas, M. (2016). Contribution to accident prediction models development for rural two-lane roads in Serbia. *Promet-Traffic&Transportation*, 28(4), 415-424.
- [10] Housing News Desk (2023). *Transition curve: Know design, types and function*. Construction Know-How (accessed 25.5.2023) <https://housing.com/news/transition-curve/>
- [11] Howard, C.R. (1891). *The Transition-Curve Field-Book*. New York: John Wiley & Sons.
- [12] Kellogg, N. B. (1907). *The Transition Curve or Curve of Adjustment as Applied to the Alignment of Railroads*. New York: McGraw Publishing Company.
- [13] Kobryń, A. (2017). Transition Curves for Highway Geometric Design. Springer Tracts on Transportation and Traffic 14, DOI: 10.1007/978-3-319-53727-6_1.
- [14] Koç, İ., Gümüş, K., & Selbesoğlu, M.O. (2015). Design of Double-Egg Curve in the Link Roads of Transportation Networks. *Tehnički Vjesnik - Technical Gazette* 22(2), pp. 495–501, DOI: 10.17559/TV-20130920085657
- [15] Kurhan, M., Kurhan, D., Husak, M. & Hmelevska, N. (2022). Determination of the type and the length for the transition curves on the directions of high-speed train operation. *Acta Technica Jaurinensis*, 15(2), pp.117–124. DOI: 10.14513/actatechjaur.00658
- [16] Lecture notes (2012), Transition curves in Road Design, *University of Wollongong*, Course Surveying (CIVL272) Academic year 2012/13. <http://www.landxml.org/schema/documentation/transition%20curves%20in%20road%20design.doc>
- [17] Lordly, H.R. (1892). The Transition Curve. *Transactions*. pp. 1–6.
- [18] Milenković, M., & Glavić, D. (2018). Analysis of relations between freeway geometry and traffic characteristics on traffic accidents. In *Advanced Technologies, Systems, and Applications II: Proceedings of the International Symposium on Innovative and Interdisciplinary Applications of Advanced Technologies (IAT)* (pp. 539-548). Springer International Publishing.
- [19] Nemesdy, E. (1985). Geometrie und Berechnung von Hyperklothoiden mit Zwei Parametern für Strassenprojektierung, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering*, 29(2-4), pp. 211–235. <https://pp.bme.hu/ee/article/view/4677/3782>
- [20] Pirti, A., Yücel, M.A. & Ocalan, T. (2016). Transrapid and the transition curve as sinusoid/ Transrapid i krivulja prijelaza kao inusoida. *Tehnički Vjesnik - Technical Gazette* 23(1), pp. 315–320. DOI: 10.17559/TV-20140217144435
- [21] Pirti, A., & Yücel, M. A. (2012). The fourth degree parabola (bi-quadratic parabola) as a transition curve/ Parabola (bi-kvadratna parabola) kao prijelazna krivulja. *Tehnički Vjesnik - Technical Gazette* 19(1), pp. 19–26.
- [22] Petrović, M. (2010). Jajaste krive i generalizacija Hügelschäfferove konstrukcije/Egg curves and generalisation Hügelschäffer construction, magistarska teza, Arhitektonski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [23] Petrović, M., Lazarević, D., Trifunović, A & Malešević, B. (2023). Proposal of New Constant Slope Surfaces for the Purposes of Designing Traffic Infrastructure Elements. In *Proceedings of 9th International Conference for Geometry and Graphics – moNGeometrija 2023*, Belgrade, Serbia, 195–204.
- [24] Petrović, M. & Malešević, B. (2023). Hügelschäffer Curve and Surface. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 17(1), pp: 179–196. DOI: 10.2298/AADM 220526027P; <http://pefmath.etf.rs/vol17num1/AADM-Vol17-No1-179-196.pdf>
- [25] Petrović, M. & Obradović, M. (2010). The Complement of the Hügelschäffer's construction of the Egg Curve. In *Proceedings of 2nd International Conference for Geometry and Graphics – moNGeometrija 2010*, Belgrade, Serbia (2010), 520–531.
- [26] Rankine, W.J.M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Griffin, Bohn, and Company, Stationers' Hall Court.
- [27] Schmidbauer, H. (1948). Kleine Mitteilungen, II. Eine exakte Eierkurvenkonstruktion mit technischen Anwendungen. *Elemente der Mathematik*, 3, pp. 67–68.
- [28] Schmidbauer, H. (1949). Berichtigung. *Elemente der Mathematik*, 4, pp. 96–96.
- [29] Talbot, A. N. (1915). *The Railway Transition Spiral*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [30] Taşçi, L., & Kuloğ, N. (2011). Investigation of a New Transition Curve. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 6(1), 23–29. DOI: 10.3846/bjrbe.2011.04
- [31] Vázquez-Méndez, M. E., Casal, G.; & Ferreiro, J. B. (2020). Numerical Computation of Egg and Double-Egg Curves with Clothoids. *Journal of Surveying Engineering*, 146 (1): 04019 021, pp. 1–8. DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000